1ère SERIE
Suites numériques

LECON 1 :
raisonnement par récurrence

1. Raisonnement par récurrence : principe

Axiome :
Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel.
Pour démontrer pour tout entier naturel $n \geq n_0$ que $P(n)$ est vraie, il suffit de procéder en deux étapes :
1 - vérifier que $P(n_0)$ est vraie
2 - démontrer que si pour un entier naturel $n \geq n_0$ $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

L'hypothèse faite en 2, « $P(n)$ est vraie pour un entier naturel $n \geq n_0$ » s'appelle **l'hypothèse de récurrence**.

L'étape 1 permet d'amorcer le processus, en établissant un rang à partir duquel la proposition P est valide.
L'étape 2 consiste à établir qu'à partir de ce rang initial, la propriété se transmet de proche en proche, d'un rang au rang suivant.

On fait souvent une analogie avec un escalier – dont toutes les marches seraient similaires. Savoir gravir un escalier c'est savoir accéder à la première marche (étape 1) puis savoir passer de n'importe quelle marche à la suivante (étape 2).

2. Exemple de démonstration par récurrence

On souhaite démontrer par récurrence la relation donnant la somme des carrées des n premiers nombres entiers en fonction de n, pour tout n entier naturel non nul :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La proposition P à démontrer est la relation elle-même. $P(n)$: « $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

Le rang initial n_0 est 1, puisque l'on cherche à démontrer la relation pour tout entier naturel non nul.

On applique les deux étapes du raisonnement par récurrence.

1ère SERIE

1) vérifier que *P* est vraie à partir d'un rang n_0 .

Cela se traduit ici par la vérification de *P(1)*.
Pour $n = 1$:

- le premier membre de l'égalité vaut $\sum_{p=1}^{1} p^2 = 1$
- le second membre vaut : $\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6} = 1$

Les deux membres de l'égalité sont égaux, *P(1)* est vérifiée.

2) Montrer que si *P(n)* est vraie alors *P(n+1)* est vraie.

P(n+1) s'écrit

« $\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)[2(n+1)+1]}{6}$ » autrement dit « $\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ »

On cherche à démontrer cette relation en s'appuyant sur *P(n)*, proposition supposée vraie par **hypothèse de récurrence** :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On ajoute $(n+1)^2$ aux deux membres de la relation, ce qui revient à ajouter le carré suivant à la somme des n premiers carrés :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

soit $\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

Or $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

ce qui équivaut à : $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

On obtient ainsi la relation : $\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est la proposition *P(n+1)*

On vient d'établir que si *P(n)* est vraie alors *P(n+1)* est vraie.

Conclusion :

La proposition ***P(n)* est vraie pour *n*=1**, et **pour tout *n*≥ 1, si *P(n)* alors *P(n+1)* est vraie** : la **propriété *P(n)* est donc vraie pour tout *n*≥ 1**.

Exercices

1ère SERIE

1) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

a) $\sum_{p=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$, pour tout n entier naturel non nul

b) $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour tout n entier naturel non nul

c) $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2.

d) pour a réel strictement positif, $(1+a)^n \geq 1+na$

2) Soit (u_n) définie pour tout n appartenant à ℵ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

a) montrer par récurrence que pour tout n entier naturel u_n est positif

b) montrer par récurrence que pour tout n, $u_{n+1} > u_n$

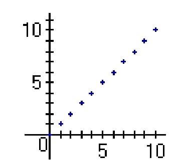
LECON 2
Suites numériques monotones - Bornes

1. Monotonie

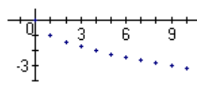
1.1 Définitions

Soit (u_n) une suite.
(u_n) est **croissante** si, pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$
(u_n) est **décroissante** si, pour tout entier n, $u_n \geq u_{n+1}$
(u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

1.2 Exemples



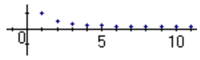
La suite (u_n) définie sur ℵ par $u_n = n$ est croissante.



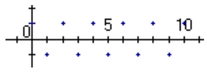
La suite (u_n) définie sur ℵ par $u_n = -\sqrt{n}$ est décroissante.

1ère SERIE

La suite (u_n) définie sur $\aleph \backslash \{0\}$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante.



La suite (u_n) définie sur $\aleph$ par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.



1.3 Techniques d'étude

Différents moyens sont à notre disposition pour étudier la monotonie d'une suite.
On peut :

- raisonner par récurrence, comme cela a été présenté précédemment.

- comparer directement u_n et u_{n+1} :
  - en faisant l'étude du signe de la différence $u_{n+1}-u_n$
  - en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, si tous les termes sont strictement positifs

- faire appel à l'étude d'une fonction f(n) sur $[0,+\infty[$, pour les suites de la forme $u_n=f(n)$.

2. Suite majorée, minorée, bornée

2.1 Définitions

Soit (u_n) une suite.
(u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leq M$.
(u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geq m$.
(u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque

Si une suite est majorée par un réel A, elle l'est également par tout réel supérieur à A. De façon similaire, Si une suite est minorée par un réel B, elle l'est également par tout réel inférieur à B.

2.2 Exemples

1) (u_n) définie sur $\aleph \backslash \{0\}$ par $u_n=\frac{1}{n}$ est majorée par 1, et minorée par 0, elle est donc bornée.
2) La suite (u_n) définie sur $\aleph$ par $u_n = n$ est minorée par 0, mais n'est pas majorée.

2.3 Techniques d'études

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est majorée par M, on peut :

1ère SERIE

- raisonner par récurrence
- étudier le signe de u_n-M

Exercices

1) Etudier la monotonie des suites suivantes :

a) $u_n=\sqrt{3n+8}$, pour n$\in \aleph$

b) $u_n= \frac{2}{n}$, pour n$\in \aleph^*$

c) $u_n= 3-\frac{2}{n}$, pour n$\in \aleph^*$

d) $u_n = n+\sin n$, pour n$\in \aleph$

2) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$ pour n $\in \aleph$.

a) Montrer que u_n est majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Montrer que u_n est bornée.

EXEMPLE D'UN DEVOIR

1ère SERIE

DEVOIR 2ème Série A ADRESSER A LA CORRECTION

Exercice 1

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2, u_1 = 3$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, $n_n = \frac{1}{3}(4u_{n-1} - u_{n-2})$.

Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n > 1$, $v_n = \frac{1}{3}(4v_{n-1} - v_{n-2})$

Montrer qu'il existe deux suites géométriques de premier terme 1 et de raison non nulle dans E. Soient q_1 et q_2 les raisons obtenues.

Montrer qu'il existe un couple (a,b) de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ u_n = aq_1{}^n + bq_2{}^n$

En déduire la limite de la suite u.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout n on ait : $(n+1)^3 u_{n+1} - n^3 u_n = n+1$

Déterminer u_n en fonction de u_1 et de n.